Karol ANDRZEJCZAK
Politechnika Poznańska

PROBABILISTYCZNY MODEL KONKURUJĄCYCH ZAGROŻEŃ

Słowa kluczowe

Funkcja ryzyka, konkurujące zagrożenia, model probabilistyczny, funkcja przetrwania, oczekiwany pozostały czas zdatności.

Streszczenie

W pracy przedstawiono koncepcję probabilistycznego modelowania wystąpienia różnorodnych zagrożeń stanu zdatności systemu technicznego. Głównym celem tego opracowania są konstrukcje funkcji służących do analizowania konkurujących zagrożeń. Praca ta została zainspirowana książką [4], w której rozwinięte zostały metody probabilistyczne mające szczególne zastosowania w biologii i medycynie. W punkcie 1 przedstawione są funkcyjne charakterystyki niezawodnościowe zaadaptowane na potrzeby badania niezawodności, bezpieczeństwa i zagrożeń systemów technicznych. Pokazane są związki między nimi. Najważniejsze wyniki są zestawione w punkcie 2, gdzie przedstawiono model konkurujących zagrożeń i jego funkcyjne charakterystyki. W punkcie 3, podane są dwa proste przykłady, w których zastosowano przedstawioną metodę modelowania probabilistycznego.

Wprowadzenie

Eksploatację systemu technicznego uważa się za podstawowy etap sprawdzania jego przydatności i spełniania oczekiwań społecznych. Współczesne systemy techniczne coraz częściej są monitorowane w czasie eksploatacji,

w celu wykrycia zagrożeń stanu zdatności. Interdyscyplinarne powiązanie problemów eksploatacji systemu wyraźnie wskazuje na dominującą wśród nich rolę diagnostyki zarówno technicznej, jak i użytkowej. Przedstawione w [1] probabilistyczne metody prognozowania przyczyny utraty zdatności systemu dychotomicznego zostały w tej pracy przeniesione na grunt badania różnorodnych zagrożeń zdatności lub trwałości systemu.

Przyjmujemy, że T jest nieujemną zmienną losową o wartościach rzeczywistych określoną na jednorodnej populacji systemów Ω, tj. T: $\Omega \rightarrow \boldsymbol{R}$. Jeżeli dla danego systemu obserwujemy kilka zdarzeń, to stosujemy wektor losowy. W teorii niezawodności zmienna losowa T jest czasem zdatności lub trwałości obiektu technicznego, tj. losowym czasem opisującym zdolność systemu do realizacji nakładanych zadań, w określonych warunkach eksploatacji. Podstawową miarą utraty zdatności lub pojawienia się zagrożenia w przedziale czasu $[0, t]$ jest powszechnie stosowana w probabilistyce dystrybuanta, tj. funkcja F: $\boldsymbol{R} \rightarrow [0, 1]$, zwana w teorii niezawodności funkcją zawodności, przy czym dziedzina funkcji zawodności ograniczona jest do $\boldsymbol{R}_+$. Symbol $\boldsymbol{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, a $\boldsymbol{R}_+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

Aby być zgodnym z normami ISO, przyjmujemy, że dystrybuanta jest funkcją co najmniej prawostronnie ciągłą, tj. $F(t) = P(T \leq t)$, gdzie P jest miarą probabilistyczną indukowaną przez zmienną losową T.

1. Charakterystyki funkcyjne czasu utraty zdatności systemu

Niech T oznacza czas do wystąpienia negatywnego zdarzenia w kontekście pewnego systemu. Zdarzeniem tym może być trwała bądź chwilowa utrata zdatności całego systemu lub jego części, pojawienie się lub rozwój jednego lub kilku z możliwych zagrożeń itp. Dualnie można wyróżnić pozytywne zdarzenie, takie jak ustąpienie zagrożenia, w wyniku podjętych pewnych działań, rozpoznanie zagrożenia, przywrócenie zdatności systemu itp.

Oprócz dystrybuanty F pięć innych funkcji znanych z teorii niezawodności charakteryzuje rozkład zm. l. T, są nimi:

a) funkcja przetrwania S (*the survival function*), zwana też niezawodnością,
b) funkcja ryzyka h (*the risk function*), interpretowana tutaj jako intensywność utraty zdatności,
c) funkcja prawdopodobieństwa lub gęstości prawdopodobieństwa f,
d) skumulowana funkcja ryzyka H,
e) oczekiwany pozostały czas zdatności *mrl* (*the mean residual life*).

Funkcja niezawodności S: $\boldsymbol{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ jest podstawową miarą bezpieczeństwa, tj. prawdopodobieństwa niewystąpienia negatywnego zdarzenia lub zjawiska w przedziale czasu $[0, t]$. Funkcja ta określona jest wzorem $S(t) = P(T > t)$. Jeżeli funkcja S jest absolutnie ciągła, to można ją przedstawić w postaci całkowej

$$S(t) = \int_t^{\infty} f(u)du, \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Funkcja *f*, spełniająca równanie (1), to gęstość prawdopodobieństwa. Jeżeli istnieje gęstość, to można określić funkcję intensywności utraty zdatności. W teorii niezawodności funkcja ta jest także znana jako warunkowa intensywność uszkodzenia, w demografii znana jest jako współczynnik umieralności, w procesach stochastycznych jako funkcja intensywności, a w ekonomii jako odwrócony iloraz Milla. Intensywność utraty zdatności jest zdefiniowana wzorem:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Jeżeli czas T jest typu ciągłego, to $h(t) = f(t)/S(t) = -d\ln(S(t))/dt$.

W kontekście konkurujących zagrożeń stanu zdatności, do ustalania przyczyny utraty zdatności systemu służą przyczynowo wyspecyfikowane intensywności zagrożeń. Ze wzoru Taylora mamy przybliżenie

$$f(t) \approx \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{3}$$

oraz

$$h(t) \approx \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{S(t)\Delta t} \tag{4}$$

Ze wzoru (3) wynika, że gęstość prawdopodobieństwa można interpretować jako spadek niezawodności lub bezpieczeństwa w małym przedziale czasowym o długości Δt, a z (4) wynika, że intensywność utraty zdatności to względny spadek niezawodności w takim przedziale. W populacji obiektów na tyle licznej, aby można założyć „funkcjonowanie prawa wielkich liczb”, ze wzoru (3) wynika, jaka część obiektów utraci zdatność lub będzie zagrożona w czasie Δt, gdy jako podstawę przyjmiemy liczbę wszystkich zdatnych obiektów na początku (t = 0), natomiast za pomocą (4) można określić tę część, w stosunku do obiektów zdatnych w chwili t.

Z funkcją intensywności utraty zdatności związana jest skumulowana funkcja intensywności H, zwana w teorii niezawodności funkcją wiodącą, którą można interpretować jako informującą o wyczerpywaniu się „zapasu zdolności

do przebywania w stanie zdatności”. Każdą z wymienionych pięciu funkcji charakteryzujących czas do wystąpienia zagrożenia obiektu można wyrazić przez dowolną inną spośród nich. Zależności te są podane w [2].

Jeżeli T jest zmienną losową typu dyskretnego, to związki pomiędzy funkcjami są inaczej opisane. Przypuśćmy, że T przyjmuje wartości t_j, $j = 1, 2,\ldots$ z prawdopodobieństwami określonymi przez funkcję prawdopodobieństwa $f(t_j) = P(T = t_j)$, $j = 1, 2,\ldots$, gdzie $t_1 < t_2 <\ldots$. Funkcja przeżycia dla zmiennej losowej typu dyskretnego jest określona wzorem:

$$S(t) = P(T > t) = \sum_{t_j > t} f(t_j) \tag{5}$$

Funkcja intensywności utraty zdatności jest określona wzorem

$$h(t_j) = P(T = t_j \mid T \geq t_j) = \frac{f(t_j)}{S(t_{j-1})},\ j = 1, 2,\ldots,\ \text{gdzie } S(t_0) = 1 \tag{6}$$

Ponieważ $f(t_j) = S(t_{j-1}) - S(t_j)$, więc $h(t_j) = 1 - S(t_j)/S(t_{j-1})$, $j = 1, 2,\ldots$

Zauważmy, że funkcję niezawodności można zapisać jako iloczyn warunkowych prawdopodobieństw przeżycia

$$S(t) = \prod_{t_j \leq t} S(t_j)/S(t_{j-1}) \tag{7}$$

Stąd wynika związek pomiędzy funkcją niezawodności a funkcją intensywności

$$S(t) = \prod_{t_j \leq t} (1 - h(t_j)) \tag{8}$$

Skumulowaną funkcję intensywności utraty zdatności dla czasu typu dyskretnego można zdefiniować na dwa sposoby. Jeśli przyjmiemy definicję

$$H(t) = \sum_{t_j \leq t} h(t_j) \tag{9}$$

to znany z przypadku ciągłego czasu zdatności związek $S(t) = \exp\{-H(t)\}$ przestanie być prawdziwy. Aby zachować prawdziwość tego związku, należy przyjąć definicję z [3]

$$H(t) = -\sum_{t_j \le t} \ln(1 - h(t_j)) \tag{10}$$

Jeżeli wielkości $h(t_j)$ są małe, to (9) można zastosować do aproksymacji (10). W zastosowaniach zalecane jest stosowanie definicji (9) z powodu możliwości użycia bezpośredniej estymacji z próby losowej dla danych z ograniczonym czasem monitorowania. Ponadto otrzymane estymatory mają pożądane własności statystyczne.

Piątą charakterystyką funkcyjną, jaką można zastosować w analizie zagrożeń stanu zdatności, jest pozostały średni czas do wystąpienia zagrożenia w chwili t, w teorii niezawodności zwany oczekiwanym pozostałym czasem przetrwania (*mean residual life* − *mrl*). Dla obiektów w wieku t funkcja $mrl(t)$ jest miarą charakteryzującą ich oczekiwany pozostały czas do wystąpienia zagrożenia w chwili t. Funkcja *mrl* zdefiniowana jest wzorem

$$mrl(t) = \mathrm{E}(T - t \mid T > t) \tag{11}$$

Geometrycznie $mrl(t)$ jest równa polu pod krzywą funkcji przetrwania $S(t)$ na prawo od t, podzielonemu przez $S(t)$. Zauważmy, że oczekiwany czas na zagrożenie $m = \mathrm{E}(T)$ jest równy polu pod krzywą niezawodności, tj. $m = mrl(0)$.

Dla zmiennej losowej T typu ciągłego

$$mrl(t) = \frac{\int_t^\infty (x-t) f(x)dx}{S(t)} = \frac{\int_t^\infty S(x)dx}{S(t)} \tag{12}$$

a dla zm. l. T typu dyskretnego

$$mrl(t) = \frac{(t_{i+1} - t)S(t_i) + \sum_{j \ge i+1} (t_{j+1} - t_j) S(t_j)}{S(t)}, \text{ dla } t_i \le t < t_{i+1} \tag{13}$$

2. Model rywalizujących zagrożeń

W praktyce często trudno jest wskazać elementarne zdarzenia, które są rzeczywistą przyczyną utraty zdatności przez system. Zadanie staje się łatwiejsze jeśli ustalimy możliwe źródła utraty zdatności. Na przykład system o strukturze szeregowej złożony z k elementów może utracić zdatność na co najmniej k różnych sposobów. Inżynierowie rozpatrują różne możliwe sposoby utraty zdatności jako formy uszkodzenia i często one są rozważane jako pierwotne przyczyny uszkodzenia. To ujęcie inżynierskie jest w tej pracy rozwijane.

Zakładamy, że przyczyną wystąpienia zagrożenia lub utraty zdatności systemu jest wystąpienie jednego spośród wielu wykluczających się zdarzeń. Mo-

del, w którym uwzględnia się wystąpienie pierwszej przyczyny utraty zdatności systemu, spośród skończonej ich liczby, nazywamy modelem rywalizujących zagrożeń. Model ten znany jest w naukach biomedycznych pod angielską nazwą *competing risks model*, patrz [4].

Niech $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ będzie zbiorem zagrożeń stanu zdatności systemu. Przykładem zagrożenia stanu zdatności systemu może być awaria jego elementu, błąd operatora, zła konserwacja, nieplanowane obciążenia lub jakiś czynnik zewnętrzny jak uderzenie pioruna lub ptaka w obiekt. Do dyskusji nad problemem rywalizujących zagrożeń formułujemy model z ukrytymi czasami ich wystąpienia.

W odróżnieniu od stosowanych metod w inżynierii niezawodności, tutaj przyjmijmy, że T_i, $i = 1,\ldots, k$ jest potencjalnym nieobserwowalnym czasem do wystąpienia i-tego konkurującego zagrożenia. Nieobserwowalność zagrożeń wynika z ich skrytości działania. Obserwowany jest natomiast stan zdatności systemu. W szczególności rejestrowany jest moment wystąpienia zagrożenia utraty zdatności systemu i przyczyna tego zagrożenia. Monitorujemy więc czas $T = \min\{T_i\colon i = 1,\ldots, k\}$ oraz wskaźnik δ o wartościach w zbiorze $\{1,\ldots, k\}$, który informuje nas, które z k zagrożeń jest przyczyną utraty zdatności obiektu, tj. $\delta = i$ jeśli $T = T_i$. Metoda opisana tutaj opiera się na intensywnościach przejść ze stanu zdatności do jednego spośród k identyfikowalnych i rozróżnialnych stanów zagrożeń zdatności systemu. Podstawową charakterystyką funkcyjną rywalizujących zagrożeń jest przyczynowo wyspecyfikowana intensywność utraty zdatności systemu ze względu na i-te zagrożenie, zdefiniowana wzorem:

$$h_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{P}(t \le T_i < t + \Delta t, \delta = i \mid T_j \ge t, j = 1,\ldots,k)}{\Delta t} \quad \text{dla } i \in \{1,\ldots, k\} \qquad (14)$$

Funkcja $h_i(t)$ jest intensywnością zagrożenia stanu zdatności systemu z i-tego powodu przy założeniu, że system jest narażony na wszystkie zagrożenia.

Całkowita intensywność zagrożenia stanu zdatności systemu, przy założeniu (2) jest addytywna, tzn. jest sumą wszystkich k intensywności zagrożeń, tj.

$$h_T(t) = \sum_{i=1}^{k} h_i(t) \qquad (15)$$

Wyspecyfikowaną intensywność zagrożenia można otrzymać z łącznej funkcji bezpieczeństwa dla k rywalizujących zagrożeń, definiowanej wzorem:

$$S(t_1,\ldots, t_k) = P(T_1 > t_1,\ldots, T_k > t_k) \qquad (16)$$

Mianowicie

$$h_i(t) = \frac{-\partial S(t_1,...,t_k)/\partial t_i}{S(t_1,...,t_k)} \text{ dla } t_1 = \ldots = t_k = t \tag{17}$$

A przy założeniu, że zagrożenia zdatności systemu występują niezależnie

$$h_i(t) = \frac{-\partial S_i(t_i)/\partial t_i}{S_i(t)} \text{ dla } t_i = t \tag{18}$$

Oznacza to, że dla niezależnych rywalizujących zagrożeń brzegowe intensywności zagrożeń i przyczynowo wyspecyfikowane intensywności zagrożeń są identyczne. W przypadku zależnych zagrożeń zasada ta nie obowiązuje. Pokazane to jest na przykładach w punkcie 3.

W modelu konkurujących zagrożeń może wystąpić potrzeba przyjęcia pewnych założeń dotyczących współzależności pojawienia się potencjalnych zagrożeń. Jeżeli przyjmiemy, że obserwujemy jedynie czas do wystąpienia zagrożenia systemu oraz jego przyczynę, a nie czasy wystąpienia potencjalnych zagrożeń, to niestety założenia o współzależności zagrożeń nie będą weryfikowalne. Problem ten nazywa się *dylematem identyfikowalności współzależności*. Dylemat ten wynika stąd, że mając dane typu (T, δ), nigdy nie rozpoznamy pary zależnych zagrożeń z pary niezależnych obserwacji.

W problemach konkurujących zagrożeń, obok intensywności zagrożenia, może interesować nas prawdopodobieństwo uwzględniające naszą wiedzę o możliwości wystąpienia tylko pewnej grupy zagrożeń, a nie wszystkich. W tym celu wprowadzamy prawdopodobieństwa dla trzech różnych informacji o zagrożeniach. Nazwiemy je prawdopodobieństwem: brutto, netto i częściowo brutto. Prawdopodobieństwem brutto nazywamy prawdopodobieństwo zagrożenia stanu zdatności systemu ze szczególnej przyczyny, w rzeczywistym świecie, gdzie wszystkie zagrożenia oddziałują na system. Prawdopodobieństwem netto nazywamy prawdopodobieństwo stanu zdatności systemu, w hipotetycznym świecie, gdzie specyficzne zagrożenie jest jedynym zagrożeniem oddziałującym na system. Jest to prawdopodobieństwo brzegowe dla specyficznego zagrożenia. Prawdopodobieństwem częściowo brutto nazywamy prawdopodobieństwo utraty zdatności systemu, w hipotetycznym świecie, gdzie część zagrożeń została wyeliminowana.

Prawdopodobieństwo brutto jest wyrażane poprzez funkcję skumulowanego specyficznego zagrożenia, zdefiniowaną wzorem $F_i(t) = P(T \leq t, \delta = i)$. Funkcję tę można wyznaczyć bezpośrednio z funkcji łącznego skumulowanego zagrożenia, łącznej gęstości zagrożeń lub z intensywności zagrożenia specyficznej przyczyny. Otrzymujemy więc zależności

$$F_i(t) = P(T \le t, \delta = i) = \int_0^t h_i(u)\exp\{-H_T(u)\}du \tag{19}$$

Tutaj $H_T(t)$ jest skumulowaną intensywnością zagrożenia stanu zdatności systemu, tj.

$$H_T(t) = \sum_{j=1}^{k}\int_0^t h_j(u)du \tag{20}$$

Zauważmy, że funkcja $F_i(t)$, $i \in \{1,\ldots, k\}$ zależy od intensywności, w której występowały wszystkie k konkurujące zagrożenia, a nie tylko i-te. Ponieważ intensywność zagrożenia $h_i(t)$ może być estymowana bezpośrednio z obserwowanych danych, więc zawodność $F_i(t)$ jest również bezpośrednio estymowana, bez czynienia żadnych założeń dotyczących łącznego rozkładu wystąpienia zagrożeń. Funkcja $F_i(t)$ nie jest dystrybuantą, ponieważ $F_i(\infty) = P(\delta = i)$. Funkcja ta jest niemalejąca oraz $F_i(0) = 0$ i $F_i(\infty) < 1$, więc nazywamy ją semi-dystrybuantą.

Funkcja netto bezpieczeństwa $S_i(t)$ jest brzegową funkcją prawdopodobieństwa, wyznaczoną z łącznej funkcji bezpieczeństwa, przyjmując, że $t_j = 0$ dla $j \ne i$. Jeżeli rywalizujące zagrożenia są niezależne, to funkcja bezpieczeństwa netto jest związana z prawdopodobieństwami brutto poprzez formułę

$$S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{dF_i(u)}{S_T(u)}du\right) \tag{21}$$

Jeżeli zagrożenia są zależne, to prawdopodobieństwa bezpieczeństwa netto można oszacować poprzez prawdopodobieństwa brutto, tj.

$$S_T(t) \le S_i(t) \le 1 - F_i(t) \tag{22}$$

W przypadku prawdopodobieństw częściowo brutto przyjmujemy, że $\boldsymbol{J}$ jest podzbiorem pozostałych potencjalnych zagrożeń utraty zdatności przez obiekt, natomiast $\boldsymbol{J}^C$ jest podzbiorem zagrożeń wyeliminowanych. Niech $T^{\boldsymbol{J}} = \min\{X_i, i\in \boldsymbol{J}\}$. Definiujemy semi-dystrybuantę częściowo brutto

$$F_i^{\boldsymbol{J}} = P(T^{\boldsymbol{J}} \le t, \delta = i), i \in \boldsymbol{J} \tag{23}$$

Tutaj i-ta semi-dystrybuanta przedstawia prawdopodobieństwo utraty zdatności obiektu z powodu i-tego zagrożenia, jeśli obiekt jest narażony jedynie na zagrożenia ze zbioru $\boldsymbol{J}$.

Na zakończenie zdefiniowana jest intensywność częściowo brutto zagrożenia zdatności

$$\lambda_i^{\boldsymbol{J}}(t) = \frac{-\partial S(t_1,...,t_k)/\partial t_i}{S(t_1,...,t_k)} \text{ oraz } t_j = t, \text{ gdy } j \in \boldsymbol{J} \text{ i } t_j = 0, \text{ gdy } j \in \boldsymbol{J}^C \tag{24}$$

Stąd semi-dystrybuanta częściowo brutto przedstawia się wzorem

$$F_i^{\boldsymbol{J}}(t) = P(T^{\boldsymbol{J}} \le t, \delta = i) = \int_0^t \lambda_i^{\boldsymbol{J}}(x) \exp\left(-\sum_{j \in \boldsymbol{J}} \int_0^t \lambda_j^{\boldsymbol{J}}(u) du \right) dx \tag{25}$$

Jeżeli zagrożenia stanu zdatności są niezależne, to intensywność zagrożenia częściowo brutto upraszcza się do postaci

$$\lambda_i^{\boldsymbol{J}}(t) = \frac{dF_i(t)/dt}{S_T(t)} \tag{26}$$

3. Przykłady

Przykład 1. Przypuśćmy, że stan zdatności obiektu jest zagrożony ze względu na trzy niezależne przyczyny, które mogą wystąpić zgodnie z rozkładem wykładniczym o intensywnościach λ_1, λ_2, λ_3, odpowiednio. W tym przypadku intensywności wystąpienia zagrożenia netto i brutto są takie same. Z addytywności, łączna intensywność utraty zdatności obiektu $h_T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Funkcja zagrożenia zdatności obiektu z powodu i-tej przyczyny ma postać

$$F_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \left(1 - \exp(-t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))\right) \tag{27}$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo brutto utraty zdatności systemu z pierwszej przyczyny, w czasie t nie jest takie samo jak prawdopodobieństwo netto (brzegowe) utraty zdatności w tym czasie, dane przez $1 - \exp(-\lambda_1 t)$. Zauważmy, że $F_i(\infty) = \lambda_i/(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$. Jest to prawdopodobieństwo, że i-te zagrożenie będzie pierwszą przyczyną utraty zdatności. Jeżeli rozważymy hipotetyczną sytuację, w której występują tylko pierwsze dwa zagrożenia utraty zdatności systemu, tj. $\boldsymbol{J} = \{1, 2\}$, to intensywność zagrożenia częściowo brutto ma postać $\lambda_i^{\boldsymbol{J}}(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, natomiast semi-dystrybuanta częściowa brutto

$$F_i^{\boldsymbol{J}}(t) = \int_0^t \lambda_i \exp(-u(\lambda_1 + \lambda_2)) du = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(1 - \exp(-t(\lambda_1 + \lambda_2))\right), \ i = 1, 2 \tag{28}$$

Przykład 2. Przypuśćmy, że przyczyną utraty stanu zdatności systemu są dwa rywalizujące zagrożenia o łącznej funkcji bezpieczeństwa postaci:

$$S(t_1,t_2) = [1+\theta(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)]^{-1/\theta}, \theta \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad (29)$$

W tym przypadku dwie potencjalne chwile wystąpienia zagrożenia są skorelowane. Współczynnik τ Kendala wynosi $\theta/(\theta + 2)$. Z (18) dla $t_1 = t_2 = t$ jest

$$h_i(t) = \frac{-\partial[1+\theta(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)]^{-1/\theta} / \partial t_i}{1+\theta t(\lambda_1 + \lambda_2)^{-1/\theta}} = \frac{\lambda_i}{1+\theta t(\lambda_1 + \lambda_2)}, i = 1, 2 \quad (30)$$

Ponieważ $T = \min(T_1, T_2)$, więc dla $t_1 = t_2 = t$ jest

$$S(t,t) = S_T(t) = [1+\theta t(\lambda_1 + \lambda_2)]^{-1/\theta}, \theta \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad (31)$$

i intensywność zagrożenia systemu wynosi

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(1+\theta t(\lambda_1 + \lambda_2))^{-1/\theta}} \quad (32)$$

Zauważmy, że brzegowa funkcja bezpieczeństwa dla T_1 jest określona wzorem

$$S(t_1, 0) = (1+\theta t \lambda_1)^{-1/\theta} \quad (33)$$

Stąd brzegowa intensywność zagrożenia ma postać $\lambda_1/(1 + \theta\lambda_1 t)$, a funkcja zagrożenia stanu zdatności i-tą przyczyną jest postaci

$$F_i(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\left(1-(1+\theta t(\lambda_1 + \lambda_2))^{-1/\theta}\right) \quad (34)$$

Podsumowanie

W pracy uwaga została skupiona na charakterystykach funkcyjnych stosowanych w modelowaniu parametrycznym zagrożeń stanu zdatności systemu. Pominięte zostały metody coraz szerzej używane w nieparametrycznym modelowaniu. W analizie zagrożeń metodami parametrycznymi łatwo jest interpretować przedstawione funkcje i ich parametry, w szczególności intensywność zagrożenia. Jeśli wystąpienia zagrożeń są niezależne, to przedstawiony model konkurujących zagrożeń można zastosować do wszystkich znanych z teorii nie-

zawodności rozkładów prawdopodobieństwa. W przypadku zależnych zagrożeń trzeba użyć rzadziej stosowane metody probabilistyki wielowymiarowej. Konstrukcje rozkładów wielowymiarowych mogą odegrać kluczową rolę w rozwoju zastosowań probabilistycznego modelowania konkurujących zagrożeń.

Bibliografia

1. Andrzejczak K.: Metody prognozowania przyczyny niezdatności złożonego obiektu dychotomicznego. Materiały XXXIII Zimowej Szkoły Niezawodności, Szczyrk 2005, s.17–31.
2. Bobrowski D.: Modele i metody matematyczne teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1985.
3. Cox, D.R., Oakes, D.: Analysis of Survival Data. New York: Chapman and Hall, 1984.
4. Klein J.P., Moeschberger M.L.: Survival Analysis. Springer, 2003.

Recenzent:
Wojciech WAWRZYŃSKI

Probabilistic model for competing risks

Key-words

Risk function, competing risks, probabilistic model, survival function, mean residual lifetime.

Summary

This paper describes a concept of probabilistic modelling of different competing risks of a technical system ability state. The main purpose is the construction of functions to analyse competing risks. In Point 1, functional characteristics are introduced, adopted to investigation of reliability, safety and the threats of technical systems. Moreover, relationships between them are shown. The most important results are shown in Point 2, where the model of competing risks is introduced. In Point 3, there are given two simple examples of systems. For these systems, there were appointed the hazard rates, the crude sub-distribution functions for the particular competing risks, the partial crude hazard rates, and the partial crude sub-distribution functions. In this publication, attention is concentrated on functional characteristics applied in parametrical

modelling of the threats of the system ability state. In analysis of competing risks with parametrical methods, the introduced functions and their parameters are easily interpret, in particular, the hazard rate. If occurrences of threats are independent, then the introduced model of competing risks can be applied to any probability distribution. In case of dependent competing risks, we should use methods of multidimensional probability methods, which are seldom applied. The multidimensional distributions can play key role in development of applications of competing risks analysis. The whole of study finishes short recapitulation and cited literature.